高木神社新算額（解説）

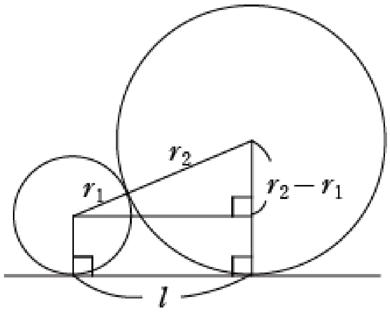
【基本術】

外接する２つの円 O_1, O_2 の半径を r_1, r_2 とし，直径を d_1, d_2 とする。

このとき，共通外接線の長さ l は，

$$l = 2\sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{d_1 d_2}$$

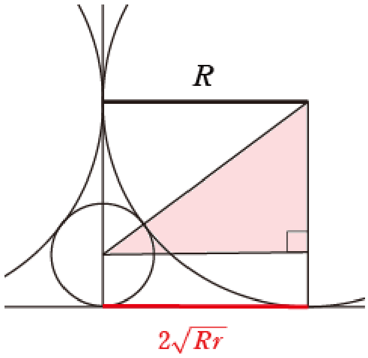
と表せる。（図内の直角三角形に三平方の定理を用いればよい）



（イ）小円が１個の場合

基本術により、$2\sqrt{Rr} = R$

これより、$\underline{r = \frac{1}{4}R}$



（ロ）小円が２個の場合

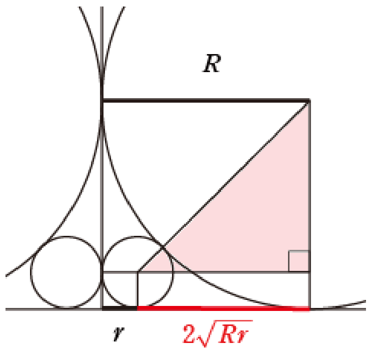
基本術により、$2\sqrt{Rr} = R - r$

両辺を２乗して整理すると、

$r^2 - 6Rr + R^2 = 0$

図より $r < R$ であるから、

$\underline{r = (3 - 2\sqrt{2})R}$



（ハ）小円が３個の場合

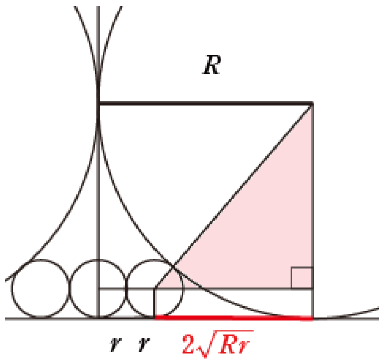
基本術により、$2\sqrt{Rr} = R - 2r$

両辺を２乗して整理すると、

$4r^2 - 8Rr + R^2 = 0$

図より $r < R$ であるから、

$\underline{r = \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right)R}$



（二）一般の場合

小円の個数を n （$n \geqq 1$）とすると、

基本術により、$2\sqrt{Rr} = R-(n-1)r$

両辺を２乗して整理すると、

$(n-1)^2r^2-2(n+1)Rr+R^2=0$

図より $r<R$ であるから、

$$r=\frac{2(n+1)R-\sqrt{4(n+1)^2-4(n-1)^2R^2}}{2(n-1)^2}$$

$$=\frac{2(n+1)R-\sqrt{16nR^2}}{2(n-1)^2}=\frac{2(n+1)R-4\sqrt{n}\,R}{(n-1)^2}$$

$$=\frac{2(n-2\sqrt{n}+1)R}{(n-1)^2}=\frac{2(\sqrt{n}-1)^2}{(n-1)^2}R$$

$$=\frac{2(\sqrt{n}-1)^2}{\{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}-1)\}^2}R=\frac{2(\sqrt{n}-1)^2}{(\sqrt{n}+1)^2(\sqrt{n}-1)^2}R$$

よって、

$$\underline{r=\frac{1}{(\sqrt{n}+1)^2}R}$$

これより、

「小円の半径が大円の半径の整数分の１」$\Longleftrightarrow$「n は平方数」

であることが分かる。

小円の個数	1	2^2	3^2	4^2	5^2	$\cdots$
$\dfrac{\text{小円の半径}}{\text{大円の半径}}$	$\dfrac{1}{2^2}$	$\dfrac{1}{3^2}$	$\dfrac{1}{4^2}$	$\dfrac{1}{5^2}$	$\dfrac{1}{6^2}$	$\cdots$